

Schulinterner Lehrplan

Liebfrauenschule Köln

Gymnasium – Sekundarstufe II

Mathematik

Einführungsphase

Stoffverteilungsübersicht Elemente der Mathematik

1 Funktionen

Potenzfunktionen, ganzrationale Funktionen untersuchen

2 Differenzialrechnung

Mittlere + lokale Änderungsrate, Potenzregeln, Faktor- und Summenregel, Tangenten und Normalen

3 Funktionsuntersuchung

Monotonie, Extrempunkte, Wendepunkte, Funktionsuntersuchungen

4 Vektoren und Geraden im Raum

Punkte im Raum, Vektoren – Verschiebungen im Raum, Vektorrechnung, Geraden im Raum, Lagebeziehungen zwischen Geraden

Funktionen und Analysis

Kompetenzerwartungen und inhaltliche Schwerpunkte aus dem Kernlehrplan	Elemente der Mathematik EP Seiten im Schülerband/ Hinweise
<ul style="list-style-type: none"> • Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen • Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und von ganzrationalen Funktionen. 	<p>1.1 Funktionen und ihre Darstellung</p> <p>Begriffe: Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich, Graph, Wertetabelle; Intervallschreibweisen und Mengenschreibweisen werden erklärt; abschnittsweise definierte Funktionen werden eingeführt; auf Funktionen mit eingeschränkten Definitionsbereichen wird hingewiesen; einfache Modellierungen mit linearen Funktionen und mit quadratischen Funktionen;</p> <p>1.2 Potenzfunktionen</p> <p>Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten werden zusammengetragen; Punkte auf dem Graphen werden bestimmt; Graphen werden erkannt und den Funktionstermen zugeordnet;</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Transformationen: Spiegelung an den Koordinatenachsen, Verschiebung, Streckung <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion), • wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (ganzrationale Funktionen, Sinusfunktion) an und deuten die zugehörigen Parameter. 	<p>1.3 Funktionsgraphen verschieben und strecken</p> <p>Einfluss der Parameter auf den Verlauf des Graphen von g für $g(x) = f(x) + d$; $g(x) = f(x - c)$; $g(x) = k \cdot f(x)$; $g(x) = f(k \cdot x)$; Funktionsterme zu vorgegebenen Transformationen aufstellen;</p> <p>Ursprungsgerade mit der Steigung m durch einen Punkt $P(x_0 y_0)$ verschieben: $y = m(x - x_0) + y_0$ Gleichung wird später für Sekanten, Tangenten und Normalen benötigt.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ 	<p>1.4 Ganzrationale Funktionen</p> <p>Begriffe: ganzrationale Funktion, Polynom, Grad, Koeffizienten; Terme von ganzrationalen Funktionen erkennen; Verlauf der Graphen für $x \rightarrow \pm\infty$ (Globalverlauf) in Abhängigkeit vom Summanden mit dem größten Exponenten bestimmen;</p>

<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> - lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel, - nutzen an den unterschiedlichen Darstellungsformen einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente, um Lösungswege effizient zu gestalten. 	<p>1.5 Symmetrien von Funktionsgraphen</p> <p>Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung rechnerisch am Funktionsterm nachweisen; Einfache Erkennung bei ganzrationalen Funktionen an den Exponenten; am Ende auch Aufgaben zu anderen Symmetrien;</p> <p>1.6 Nullstellen</p> <p>Bestimmen von Nullstellen ganzrationaler Funktionen mithilfe von Faktoren oder durch Ausklammern ohne Hilfsmittel und auch mithilfe eines Rechners; auf den Verlauf der Graphen an mehrfachen Nullstellen wird eingegangen;</p> <p>Lösen von Gleichungen höheren Grades</p> <p>Anregung für ein Referat</p>
<p>• Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> - berechnen mittlere und lokale Änderungsrate und interpretieren sie im Sachkontext, - erläutern den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke anhand entsprechender Funktionsgraphen, - erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate und nutzen die Schreibweise $\lim_{x \rightarrow} f(x)$, - deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen. 	<p>2.1 Mittlere Änderungsrate</p> <p>Begriffe: Differenzenquotient, mittlere Änderungsrate; Sekante; mittlere Änderungsraten aus Tabellen und Graphen bestimmen und mit dem Funktionsterm berechnen; geometrische Deutung als Sekantensteigung; Gleichung einer Sekante bestimmen; mittlere Änderungsraten in Sachkontexten deuten;</p> <p>2.2 Lokale Änderungsrate</p> <p>Momentangeschwindigkeit näherungsweise aus mittleren Geschwindigkeiten bestimmen; Begriffe: Grenzwert des Differenzenquotienten, lokale Änderungsrate; Ableitung an einer Stelle, Tangente, Steigung eines Graphen in einem Punkt; Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigung; inhaltliche Interpretationen von Änderungsraten; lokale Änderungsraten werden hier nur näherungsweise mithilfe des Differenzenquotienten bestimmt oder näherungsweise durch Einzeichnen einer Tangente nach Augenmaß;</p> <p>2.3 Ableitung an einer Stelle berechnen</p>

<ul style="list-style-type: none"> - bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen 	<p>exakte Bestimmung der Ableitung an einer Stelle für die Quadratfunktion mit Beweis; Einführung der h-Schreibweise; Ableitungen für weitere quadratische Funktionen an einer Stelle mit Nutzung der h-Schreibweise;</p> <p>Differenzierbarkeit Vorschlag für ein Referat</p>
<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> - beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion), - leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen. 	<p>2.4 Graph der Ableitungsfunktion</p> <p>Begriffe: Ableitungsfunktion, grafisches Differenzieren, Hochpunkt, Tiefpunkt, Wendepunkt, Sattelpunkt;</p> <p>Aus dem Graphen einer Funktion f soll der Graph der Ableitungsfunktion f' entwickelt werden. Dabei sind Hoch-, Tief- und Sattelpunkte mit waagerechten Tangenten leicht zu finden. Wendepunkte erkennt man an der extremalen Steigung der Tangente, die den Graphen dort durchsetzt. In diesem Abschnitt werden die Grundlagen für die Funktionsuntersuchungen mithilfe der Ableitung gelegt. Die Entwicklung eines Graphen von f aus dem Graphen von f' erfolgt später im Abschnitt 3.1 zur Monotonie.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten, • wenden die Summen- und Faktorregel an und beweisen eine dieser Ableitungsregeln. 	<p>2.5 Potenzregel</p> <p>Die Kubikfunktion wird abgeleitet. Die Vorgehensweise kann auf Potenzfunktionen übertragen werden, womit man die Potenzregel erhält.</p> <p>2.6 Faktor- und Summenregel</p> <p>Die Faktorregel und die Summenregel werden hergeleitet. Für die Schülerinnen und Schüler bietet sich besonders der Beweis für die Faktorregel an, da dieser ohne Trick auskommt; Anwenden der Regeln in innermathematischen Aufgaben und in Sachaufgaben;</p>
<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel. 	<p>2.7 Tangenten und Normalen</p> <p>Der Begriff der Normalen wird zusammen mit der Orthogonalitätsbedingung von Geraden eingeführt; Verschiedene Aufgabenstellungen zu Tangenten und Normalen werden angeboten; Steigungswinkel werden berechnet; Auf die Orthogonalität von Funktionsgraphen wird eingegangen.</p>

	<p>Die Entstehung der Differenzialrechnung</p> <p>Vorschlag für ein Referat zum Prioritätenstreit zwischen Newton und Leibniz</p>
<p>• Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> - leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen, - beschreiben das Monotonieverhalten einer Funktion mithilfe der Ableitung, - unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich, - verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten, - beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mithilfe der 2. Ableitung, - lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen. 	<p>3.1 Monotonie</p> <p>strenge Monotonie; Monotoniesatz; Monotonieintervalle werden rechnerisch mithilfe der 1. Ableitung bestimmt und der Vorzeichenwechsel wird überprüft und übersichtlich in einer Tabelle dargestellt; Eigenschaften von f am Graphen von f' erkennen; aus dem Graphen von f' einen möglichen Graphen von f entwickeln;</p> <p>3.2 Extrempunkte</p> <p>unterscheiden zwischen Extrempunkten und Extremstellen; kennen das notwendige Kriterium und das Vorzeichenwechselkriterium; überprüfen den Vorzeichenwechsel an den Nullstellen von f' wie bei der Monotonie und stellen die Ergebnisse übersichtlich in einer Tabelle dar; Begriffe: lokales Maximum bzw. Minimum, globales Maximum bzw. Minimum, lokales Extremum, globales Extremum, Randextremum; Extrempunkte mithilfe eines Rechners bestimmen;</p> <p>3.3 Zweite Ableitung</p> <p>zweite Ableitung und dritte Ableitung werden eingeführt; f''-Kriterium für Extremstellen wird begründet; Extremstellen werden bestimmt, Zusammenhänge zwischen den Graphen von f, f' und f'' werden aufgezeigt;</p> <p>3.4 Wendepunkte</p> <p>Begriffe: Linkskurve, Rechtskurve; Krümmungsverhalten von f an der Monotonie von f' erkennen; Notwendiges- und Hinreichendes Kriterium für Wendestellen; Wendepunkte rechnerisch mithilfe von f'' bestimmen, Vorzeichenwechsel an den Nullstellen von f'' überprüfen und übersichtlich in einer Tabelle darstellen; Wendepunkte mithilfe eines Rechners bestimmen, f'''-Kriterium;</p> <p>Typen ganzrationaler Funktionen 3. Grades</p>

	Der Graph der Ableitungsfunktion einer Funktion 3. Grades ist eine Parabel. Aus den möglichen Lagen von Parabel ergeben sich Schlussfolgerungen für die Funktionen 3. Grades.
	3.5 Funktionsuntersuchungen Die Kriterien aus den vorangegangenen Abschnitten werden hier übersichtlich dargestellt und in verschiedenen innermathematischen Aufgaben und in Sachaufgaben angewendet.

Analytische Geometrie und Lineare Algebra

Kompetenzerwartungen und inhaltliche Schwerpunkte aus dem Kernlehrplan	Elemente der Mathematik EP Seiten im Schülerband/ Hinweise
<ul style="list-style-type: none"> • Koordinatisierungen des Raumes: Punkte, Ortsvektoren, Vektoren • Eigenschaften von Vektoren: Länge <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum, • stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar, • deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen, • berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras. 	4.1 Punkte im Raum Einführung eines räumlichen Koordinatensystems; Schrägbild des Koordinatensystems auf Karogitter zeichnen; Punkte mithilfe ihres Koordinatenzuges zeichnen; Koordinaten an Schrägbildern ablesen; Schrägbild eines Körpers im Koordinatensystem zeichnen; Hinweis auf Probleme beim Ablesen von Koordinaten; Projektion in eine Koordinatenebene; Spiegelungen.
	4.2 Verschiebungen im Raum – Vektoren Vektor als Verschiebung interpretieren, die durch ein Zahlentripel beschrieben werden kann; Begriffe: Verbindungsvektor; Ortsvektor; Nullvektor, Gegenvektor; Länge eines Vektors bestimmen; Abstand zweier Punkte im Raum bestimmen;
<ul style="list-style-type: none"> • Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar • Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität <p>Die Schülerinnen und Schüler</p>	4.3 Vektoren addieren und subtrahieren Summenvektor und Differenzvektor berechnen und am Vektorparallelogramm deuten; Rechengesetze; Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken mithilfe von Vektoren untersuchen;

<ul style="list-style-type: none"> - addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität, - weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach, - deuten Vektoren in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit. 	<p>4.4 Vektoren vervielfachen</p> <p>Vektoren vervielfachen und Vielfache geometrisch als Parallele Pfeile deuten – Kollinearität; Vektoren auf Parallelität prüfen – Lineares Gleichungssystem mit einer Variablen und drei Gleichungen; Vektoren grafisch vervielfachen; Vektoren in Figuren durch Linearkombinationen aus gegebenen Vektoren beschreiben; Mittelpunkt einer Strecke;</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Geraden und Strecken: Parameterform • Lagebeziehung von Geraden: identisch, parallel, windschief, sich schneidend • Schnittpunkte: Geraden <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> - stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar, - interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext, - untersuchen Lagebeziehungen von Geraden, - untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge, - nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen, - lösen lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang von Lagebeziehungen von Geraden und interpretieren die jeweilige Lösungsmenge. 	<p>4.5 Geraden im Raum</p> <p>Begriffe: Parameterdarstellung, Richtungsvektor, Stützvektor, Ursprungsgerade; Gerade durch zwei Punkte bestimmen; Punktprobe – Lineares Gleichungssystem mit einer Variablen und drei Gleichungen; Strecken beschreiben; Lage einer Geraden im Raum – Spurpunkte bestimmen;</p> <hr/> <p>4.6 Lagebeziehungen zwischen Geraden</p> <p>mögliche Lagen von Geraden im Raum verdeutlichen; systematische Untersuchung von Lagebeziehungen; Schnittpunkt bestimmen – Lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen und drei Gleichungen; Lagebeziehungen mithilfe eines Rechners untersuchen – Lineare Gleichungssysteme lösen und das Lösungsverhalten geometrisch deuten.</p>

