

Tutorienprojekt Mathe

Wie rechnet ein Taschenrechner?

In unserer modernen Welt sind sie überhaupt nicht mehr wegzudenken. Ob in der Schule, bei der Arbeit oder bei komplexen Berechnungen, sie sind für jeden von uns ein wichtiges Hilfsmittel und wesentlicher Bestandteil des Alltags. Die Rede ist von Taschenrechnern. Egal ob in groß oder klein, auf dem Handy oder dem PC, Taschenrechner sind überall zu finden und Teil unseres Lebens.

Aber wie rechnet ein Taschenrechner eigentlich?

Hinter der vermeintlich einfachen Bedienung verbirgt sich eine Vielzahl von Algorithmen, die es Taschenrechnern ermöglichen, präzise und richtige Ergebnisse in Sekundenschnelle zu liefern. Doch wie schafft ein Taschenrechner das? In diesem Essay wird zunächst auf allgemeine Unterschiede zwischen dem Rechnen per Hand und der Rechenweise eines Taschenrechners eingegangen. Anschließend werden drei Verfahren vorgestellt, mithilfe derer der Taschenrechner Wurzeln, Logarithmen und Gleichungen löst.

Grundsätzlich stellen das Rechnen per Hand und die Rechenweise eines Taschenrechners zwei Methoden zur Lösung mathematischer Probleme dar. Unterscheiden tun sich diese vor allem in Bezug auf die Richtigkeit und die Geschwindigkeit des Rechnens. Beim Lösen mathematischer Probleme per Hand muss man verschiedenste Regeln der Mathematik, wie beispielsweise Regeln der Algebra, beachten. Wegen der Notwendigkeit der Beachtung und richtigen Anwendung der Regeln ist das Lösen komplexer mathematischer Probleme per Hand zeitintensiver und fehleranfälliger als das Rechnen mit Hilfe eines Taschenrechners.

Während in einem Taschenrechner Millionen von Transistoren innerhalb von Millisekunden die Eingabe in einen Binärcode umwandeln und bearbeiten, dabei alle nötigen Rechenoperationen durchführen und letztlich auch überprüfen, ist das Rechnen per Hand wesentlich zeitintensiver. Die Berechnungen eines Taschenrechners sind bei richtiger Bedienung fast ausschließlich fehlerfrei und sehr schnell. Deshalb stellt ein Taschenrechner ein nützliches Hilfsmittel für Schüler, Fachleute und alle anderen Menschen dar.

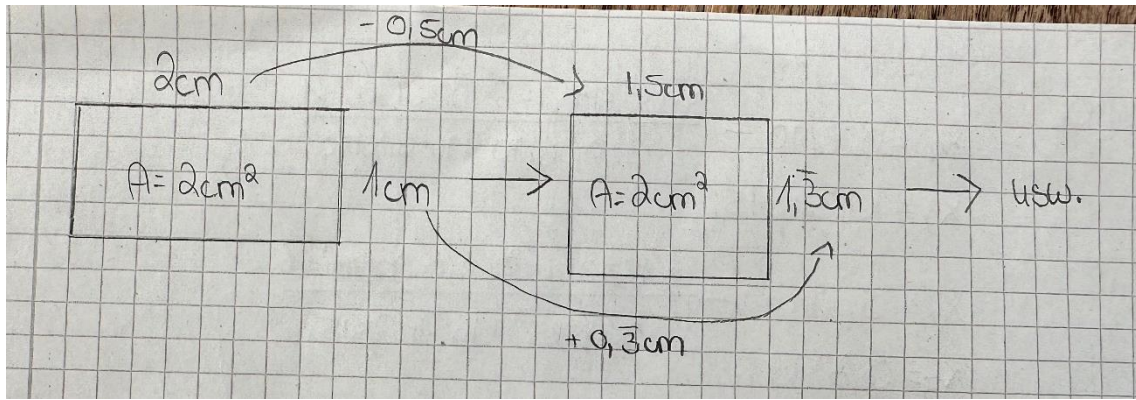
Um die Ergebnisse eines Taschenrechners richtig interpretieren zu können, ist es aber hilfreich, die komplexen Vorgänge und Verfahren, die in einem Taschenrechner stattfinden, zu verstehen. Deshalb werden nachfolgend drei Verfahren dargelegt, wie ein Taschenrechner unterschiedliche Wurzeln, Logarithmen und Gleichungen löst.

Wurzeln

Das erste Verfahren erläutert, wie ein Taschenrechner Wurzeln löst. Der Taschenrechner nutzt zum Lösen einer Wurzel das sogenannte "Heron-Verfahren". Das Heron-Verfahren ist ein Näherungsverfahren, also ein Verfahren, bei welchem sich der Taschenrechner mit jeder Berechnung dem Endergebnis annähert. Da Wurzeln, die nicht direkt berechnet werden können, wie beispielsweise die Wurzel aus 5, unendlich viele Nachkommastellen haben können, wird im Taschenrechner eine gerundete und "nur" angenäherte Zahl angegeben. Diese ist nach ein paar Berechnungen bereits so genau, dass bei weiteren Berechnungen nur noch minimale Veränderungen einer geringen Nachkommastelle entstehen würden.

Das Heron-Verfahren basiert auf dem geometrischen Ansatz, dass bei einem Quadrat A mit dem Flächeninhalt a^2 alle Seiten dieselbe Länge haben. Bei einer Wurzelberechnung geht der Taschenrechner zunächst von einem Rechteck aus: Bei der Wurzel aus 5 wäre das zum Beispiel ein Rechteck mit der Seitenlänge 5 und 1. Anschließend wird die kurze Seite im Laufe des Verfahrens

verlängert, während die längere Seite immer weiter gekürzt wird, um letztendlich ein Quadrat zu erhalten.



Somit zum geometrischen Ansatz, jetzt wird auf die vom Taschenrechner genutzte Formel eingegangen. Zunächst zieht der Taschenrechner, wenn möglich, teilweise die Wurzel. Das bedeutet, dass er von der Wurzel eine Wurzel mit "glattem" Ergebnis abzieht. Im Beispiel von der Wurzel aus 5 ist dies möglich, indem man die Wurzel aus 4, 2, zieht. Anschließend wird $5/4$ gerechnet, um das teilweise Wurzelziehen zu beenden und den übrig gebliebenen Wert zu errechnen. In diesem Beispiel beträgt dieser 1,25. Wenn dieser erste Schritt vollzogen wurde, beginnt das eigentliche Verfahren: Um einen Wert zu erhalten, der möglichst nah an dem eigentlichen Wert des Ergebnisses der Wurzel liegt, wird dieser in eine Formel eingesetzt. Diese lautet:

$$x_1 = \frac{x_0 + \frac{a}{x_0}}{2}$$

x_0 stellt in dieser Formel den Wert, aus dem die Wurzel berechnet werden soll, dar. x_1 ist der Wert mit dem anschließend fortgefahren wird. Für x_0 wird zu Beginn der Wert 1,0 eingesetzt, da die Formel so unverändert bleibt.

Die Formel dient der Ermittlung eines guten, möglichst nah am Ergebnis liegenden Startwertes.

Vereinfacht lautet die Formel nach Einsetzen des Wertes 1,0 für x_0 : $x_1 = (1+a)/2$.

Bei Anwendung der Formel auf das Beispiel, wird der beim teilweisen Wurzelziehen übriggebliebene Wert, 1,25, eingesetzt. So ergibt sich $x_1 = (1+1,25)/2$. Das Ergebnis 1,125 wird anschließend in die gleiche Formel eingesetzt, mit dem Unterschied, dass diese statt x_0 , x_1 als Variable beinhaltet und x_1 durch x_2 ersetzt wird. Diese Formel lautet somit: $x_2 = (x_1 + (a/x_1))/2$.

Dabei wird der errechnete Wert x_1 mit dem Wert des Terms a/x_1 addiert.

a/x_1 dient in der Gleichung zur Berechnung des Mittelwertes der kurzen Seite im Rechteck.

Mit $/2$ wird der Mittelwert des gesamten Terms in der oberen Bruchhälfte ermittelt. Dieser Wert stellt somit die Länge der verkürzten Seite im Rechteck dar. Diese Berechnung, also das Ermitteln eines Wertes, dessen Einsetzen in eine Formel, ebenso wie die Berechnung dieser, wird insgesamt dreimal durchgeführt. Anschließend würde sich das Ergebnis, aufgrund von einer bereits sehr hohen

Genauigkeit des ermittelten Werts, nur noch minimal verändern, weshalb diese Anzahl an Berechnungen gewählt wird. Anschließend wird der beim teilweisen Wurzelziehen errechnete Wert dem anhand der Formel, berechneten Wert hinzugefügt. Vollständig in Formelschreibweise bedeutet das:

1. Schritt (Startwert): $x_1 = \frac{x_0 + \frac{a}{x_0}}{2}$
 2. Schritt: $x_2 = \frac{x_1 + \frac{a}{x_1}}{2}$
 3. Schritt: $x_3 = \frac{x_2 + \frac{a}{x_2}}{2}$
 (4. Schritt: Hinzufügen des Werts aus dem teilweisen Wurzelziehen
 $\Rightarrow x_3 \cdot (\text{Wert des teilweisen Wurzelziehens})$)

Die allgemeine Formel zur Wurzelberechnung mit Hilfe des Heron-Verfahrens lautet folgendermaßen: $x_{n+1} = (x_n + (a/x_n))/2$.

x_{n+1} stellt hierbei die neue Seitenlänge des Rechtecks dar, x_n die bestehende.

Wendet man die gesamte Methode auf das oben genannte Beispiel an, ergibt sich:

1. Schritt: $x_1 = \frac{1 + 1,125}{2}$ Ergebnis einsetzen (1,125)
 2. Schritt: $x_2 = \frac{1,125 + \frac{1,125}{1,125}}{2}$ Ergebnis einsetzen (1,1806)
 3. Schritt: $x_3 = \frac{1,1806 + \frac{1,125}{1,1806}}{2}$
 $x_3 = 1,1803$
 4. Schritt: $1,1803 \cdot 2 = 2,3606$

Der Taschenrechner kann zusätzlich noch die sogenannte "Fehlereinschätzung" angeben. Dabei werden die relativen Fehler, also die Abweichung des Ergebnisses vom eigentlichen Ergebnis angegeben. Dabei wird nur die äußerste Abweichung vom Sollwert aufgeführt.

Um eine Wurzel mit "glatttem" Ergebnis im Kopf lösen zu können, bedarf es der Kenntnis des großen $1 \times 1^*$ und dem Verständnis einfacher mathematischer Zusammenhänge. Außerdem wird beim Lösen von Wurzel per Hand die sogenannte Primfaktorzerlegung verwendet. Dabei wird zunächst der Radikand in Primfaktoren zerlegt, das heißt der Radikand wird in eine Multiplikation mehrerer möglichst kleiner Faktoren aufgeteilt. Anschließend werden gleiche Faktoren in einer Potenz zusammengefasst. Danach wird jeder einzelne Faktor unter eine eigene Wurzel geschrieben, die Wurzel als Potenz geschrieben und anschließend ausgerechnet. In einem Beispiel für die Wurzel aus 196 heißt das zunächst die Zerlegung in die Wurzel aus $2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7$. Als Potenz geschrieben bedeutet das also die Wurzel aus $2^2 \cdot 7^2$. Unter eine eigene Wurzel geschrieben hieße das: Wurzel aus 2^2 multipliziert mit der Wurzel aus 7^2 . Die Wurzel aus 196 ist also die Wurzel aus dem Produkt aus

$2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7$, also der Wurzel aus 2^2 und 7^2 . Ausgerechnet hieße das: Wurzel aus 196 ist gleich $2 \cdot 7$. Das Ergebnis der Wurzel ist somit $2 \cdot 7$, also 14.

Logarithmen:

Ein weiteres Verfahren, welches der Taschenrechner anwendet, dient zur Berechnung von Logarithmen. Je nach Taschenrechner variieren die Lösungsverfahren, hier wird ein häufig genutztes Verfahren aufgezeigt: Die Potenzreihe. Auch dabei gibt es unterschiedliche Arten, wobei hier auf die sogenannte "Taylor-Reihe" eingegangen wird. Bei diesem Verfahren handelt es sich, wie bei dem Verfahren zur Wurzelberechnung um ein Annäherungsverfahren.

Die allgemeine Formel einer Potenzreihe, die einen Logarithmus darstellt, lautet:

$$\ln(1+x) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{k+1}}{k+1}$$

Dabei bedeuten das Unendlichkeitszeichen und $n=0$, dass die Potenzreihe von 0 bis in die Unendlichkeit verläuft.

Um diese Formel in eine Potenzreihe umzuwandeln, werden für k unendlich viele Werte eingesetzt, beispielsweise 0, 1, 2, 3, 4, etc.: Daraus resultiert nach Umrechnung die bekannte Potenzreihenform:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \dots = \ln(1+x)$$

Diese Formel entsteht durch die Auflösung der Gleichung für die allgemeine Formel einer Potenzreihe, wenn für k der jeweilige Wert eingesetzt wurde. Die Potenzreihe kann um unendlich viele Argumente ergänzt werden, um ein genaueres Ergebnis zu erzielen. Ein Taschenrechner gibt zumeist 4 – 5 Nachkommastellen des Ergebnisses an, die mit dieser Formel bestimmt werden.

Um den Wert für x , den man in die Gleichung einsetzen muss, um den gesuchten Wert herauszufinden, addiert oder subtrahiert der Taschenrechner von 1 einen bestimmten Wert, damit der Ausgangswert aus der Rechnung resultiert. Beispiel: Man möchte den Logarithmus eines Exponenten zur Basis 0,5 errechnen. Dann subtrahiert der Taschenrechner 0,5 von 1, um einen Ausgangswert, in diesem Fall 0,5, zu erhalten. Das heißt:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{k+1}}{k+1}$$

$$\rightarrow \ln(1-0,5) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0,5^{k+1}}{k+1}, \text{ denn } 1-0,5 = 0,5$$

Dieser Wert wird anschließend für x in die Formel eingesetzt und die Potenzreihe ausgerechnet.

Um einen im Kopf lösbaren Logarithmus ausrechnen zu können, bedarf es eines grundlegenden Verständnisses mathematischer Zusammenhänge und Kenntnissen einfacher Potenzen, wie etwa 2^0 bis 2^{10} .

Gleichungen

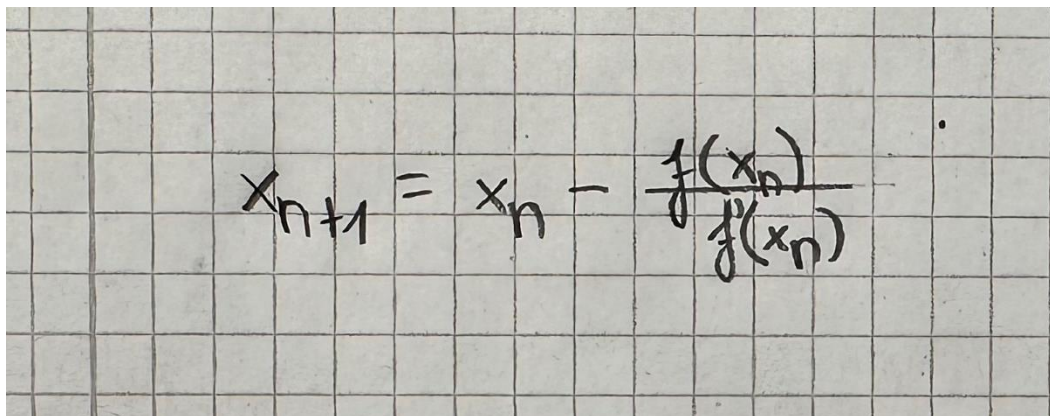
Zur Berechnung und zum Lösen von Gleichungen nutzen die meisten Taschenrechner das Newton-Verfahren. Dieses ist ein Teil mehrerer numerischer Verfahren, die zum Lösen von Gleichungen genutzt werden können.

Ein Taschenrechner kann durch diese Verfahren die Nullstellen von beispielsweise linearen, quadratischen und exponentiellen Gleichungen berechnen.

Die "Solve"-Funktion, die dem Taschenrechner befiehlt, eine Gleichung zu lösen, bewirkt, dass der Taschenrechner einen Algorithmus nutzt, um eine Näherlösung für die Gleichung zu finden. Dieser Algorithmus beinhaltet zumeist das Newton-Verfahren. Es ist ein Verfahren, bei dem es eine Iteration von Schätzungen gibt, bis die geforderte Genauigkeit der Näherung vorliegt. Eine Iteration ist eine mehrfache Wiederholung des gleichen Prozesses.

Zunächst legt der Taschenrechner einen Startwert fest, der ein Schätzwert für eine Nullstelle ist.

Dieser Startwert sollte immer möglichst nah an dem eigentlichen Wert der Nullstelle liegen, um Fehler und Ungenauigkeiten vorzubeugen. Ein möglichst genauer Wert lässt sich beispielsweise mit einer Wertetabelle ermitteln. Im zweiten Schritt wird der festgelegte Startwert in eine Gleichung eingesetzt. Diese lautet:


$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Dabei steht x_{n+1} für die nächste Näherung an das eigentliche Ergebnis, x_n für den aktuellen Näherungswert, im ersten Schritt für den Startwert. $f(x)$ gibt den Funktionswert x_n an, also den y -Wert der Funktion zu einem x -Wert. $f'(x)$ ist die Ableitung der Funktion x_n .

Im folgenden Schritt wird die Gleichung ausgerechnet und das Ergebnis anschließend wieder in die Gleichung eingesetzt. Das bedeutet:

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f'(x_{n+1})}$$

Dieser Schritt wird fortan solange wiederholt, bis die gewünschte Näherung berechnet ist. Bei einem Taschenrechner liegt diese meistens bei ungefähr vier Nachkommastellen. Um diese zu errechnen, wiederholt der Taschenrechner den zuvor erläuterten Vorgang, weshalb dieses Verfahren den Namen "Iterationsverfahren" trägt. Ein Beispiel für dieses Verfahren wäre die Gleichung $5x^3 + 8x^2 - 1 = 0$. Nach Festlegen des Startwerts auf, beispielsweise, 0,5 wird dieser Wert in die Gleichung eingesetzt:

$$x_0 = 0,5$$

$$0,5 - \frac{5 \cdot 0,5^3 + 8 \cdot 0,5^2 - 1}{15 \cdot 0,5^2 + 16 \cdot 0,5} = x_1$$

$$x_1 = 0,36170$$

Dieser Schritt wird anschließend noch dreimal durchgeführt. Weiter Berechnungen können entfallen, da sich nur noch minimale Veränderungen kleiner Nachkommastellen ergeben würden.

$$x_2 = 0,36170 - \frac{5 \cdot 0,36170^3 + 8 \cdot 0,36170^2 - 1}{15 \cdot 0,36170^2 + 16 \cdot 0,36170}$$

$$x_2 = 0,32515$$

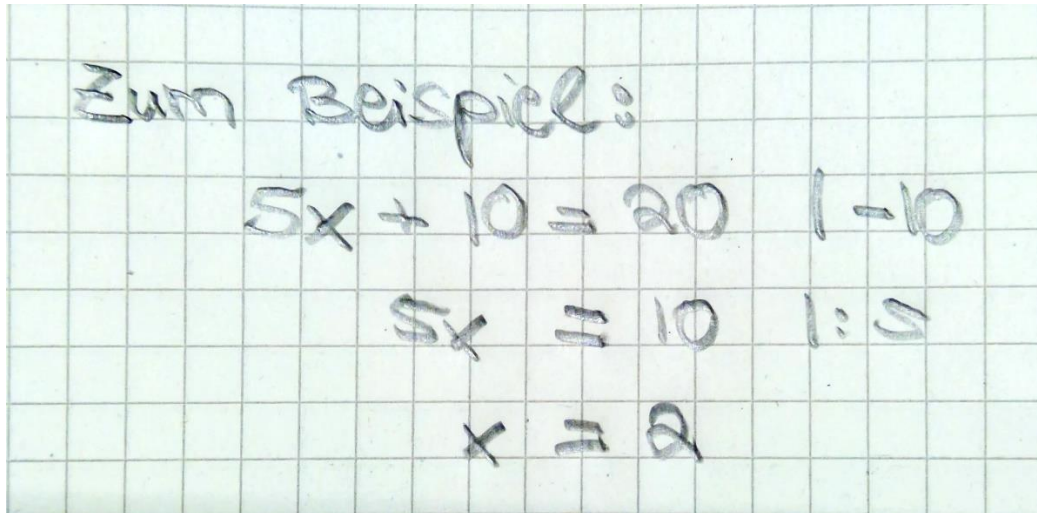
$$x_3 = 0,32515 - \frac{5 \cdot 0,32515^3 + 8 \cdot 0,32515^2 - 1}{15 \cdot 0,32515^2 + 16 \cdot 0,32515}$$

$$x_3 = 0,32255$$

$$x_4 = 0,32255 - \frac{5 \cdot 0,32255^3 + 8 \cdot 0,32255^2 - 1}{15 \cdot 0,32255^2 + 16 \cdot 0,32255}$$

$$x_4 = 0,32254$$

Im Gegensatz zum Taschenrechner wird beim Lösen von Gleichungen per Hand Äquivalenzumformung genutzt. Bei dieser Methode stellt man die Gleichung durch Addition, Subtraktion und Division so um, dass am Ende nur noch eine Variable auf einer Seite der Gleichung vorhanden ist. Auf der anderen Seite der Gleichung steht dann ein Wert, mit dem sich die Gleichung lösen lässt.



The image shows a handwritten solution of a linear equation on a green grid background. The text is written in black ink. It starts with 'Zum Beispiel:' followed by the equation $5x + 10 = 20$. To the right of this equation is the operation -10 . Below this, the equation is simplified to $5x = 10$, with the operation $:5$ written to the right. Finally, the solution $x = 2$ is written at the bottom.

$$\begin{array}{l} \text{Zum Beispiel:} \\ 5x + 10 = 20 \quad | -10 \\ 5x = 10 \quad | :5 \\ x = 2 \end{array}$$

Ein Taschenrechner nutzt also unterschiedliche Verfahren, um verschiedene Rechnungen durchzuführen. Diese Verfahren werden von einem Großteil der Taschenrechner genutzt und sind weit verbreitet.

Wie man sieht, steckt hinter den Ergebnissen, die ein Taschenrechner liefert, eine komplexe Mathematik, die jedoch leicht verständlich und auch per Hand ausführbar ist. Letztendlich ist die Möglichkeit, eine Rechnung vom Taschenrechner ausführen zu lassen, aber wesentlich bequemer und schneller und erleichtert uns somit das Leben.

Autor: Matheo Kaup, EF der LFS Köln